Wenn mit den Achsen der beiden Zahnräder wiederum andere Zahnräder fest verbunden sind, so hat man, um das Übersetzungsverhältnis eines Zahnradsystemes zu berechnen, das Produkt aller Übersetzungsverhältnisse der ineinander eingreifenden Zahnräder zu bilden. In den Uhrwerken benutzt man ein solches Zahnradsystem, um mittels einer an der Welle des größten Zahnrades angreifenden Feder oder eines dort wirkenden Gewichtes das sich am schnellsten drehende kleinste Zahnrad zu bewegen. Hierbei ist die Kraft, mit der das schnellste Zahnrad bewegt wird, meistens nur sehr gering, so daß demnach die Kraft der Feder oder des Gewichtes in erster Linie zur Überwindung der Reibungswiderstände aufgebraucht wird.

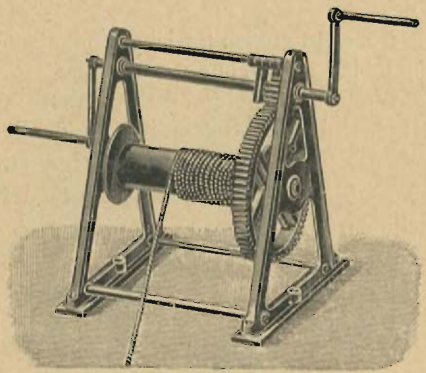

Fig. 281. Winde.

In Fig. 281 ist eine Winde abgebildet, die aus einer Kurbel, zwei Zahnrädern und einem Wellrad zusammengesetzt ist. Das Übersetzungsverhältnis ist gleich dem Produkte der Übersetzungsverhältnisse dieser drei Teile.

Sollen die Achsen der Zahnräder gegeneinander geneigt sein, so müssen **konische** Zahnräder benutzt werden. Bei senkrecht aufeinanderstehenden Achsen werden auch wohl **Kronräder** angewandt. Endlich kann man die Zähne des größeren Zahnrades an der Innenseite seines Umfanges anbringen und an das kleinere Zahnrad innerhalb des größeren laufen lassen.

Der **Treibriemen** verbindet die Umfänge zweier Räder mit verschiedenen Radien so miteinander, daß die Umfangsgeschwindigkeit der beiden Räder gleich ist. In letzter Hinsicht bewirkt also der Treibriemen genau dasselbe

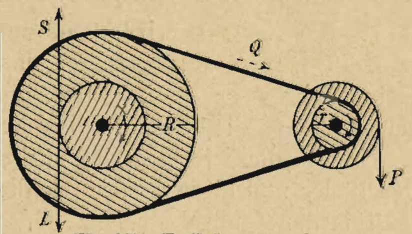

Fig. 282. Treibriemenanordnung.

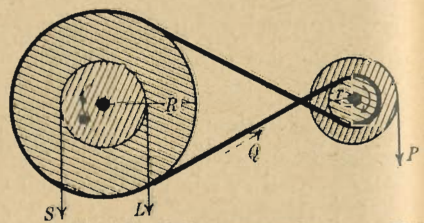

Fig. 283. Treibriemenanordnung.

wie die Zähne bei den Zahnrädern. Bei dem in Fig. 282 abgebildeten Treibriemen bewegen sich beide Räder in demselben Sinne, bei dem in Fig. 283 abgebildeten g e k r e u z t e n Riemen in entgegengesetzten Richtungen. Das Übersetzungsverhältnis ist durch das Verhältnis $\frac{R}{r}$ der Radien der beiden Räder bestimmt. Durch den Treibriemen können zwei Räder verbunden werden, deren Achsen weit voneinander entfernt sind. Außerdem können die Achsen gegeneinander geneigt sein.

Die **Wagen** mit ihren verschiedenen Formen: **gemeine Wage, Zeigerwage, Brückenwage** usw. (mit Ausnahme der Federwage) bilden Anwendungen des

Hebels oder des Momentensatzes. Sie werden fast ausnahmslos in der Weise benutzt, daß zwei durch das Gewicht zweier Körper bestimmte Kräfte einander das G l e i c h g e w i c h t halten. Dieses Gleichgewicht muß sicher (stabil) sein, damit ein auf der einen Seite wirkendes Übergewicht einen der Größe dieses Übergewichtes entsprechenden Ausschlag erzeugt.

Die gemeine Wage (Fig. 284) besteht aus einer festen Stange (dem Wagebalken), die um eine durch ihren Mittelpunkt gehende wagerechte Achse in lotrechter Ebene drehbar ist. Bei feinen Wagen besteht der Wagebalken aus einem leichten, aber trotzdem wenig biegsamen Rahmen aus dünnen Metallstäben. An den Enden des Wagebalkens sind zwei gleiche Wagschalen angebracht. Bei unbelasteten Wagschalen steht der Wagebalken wagerecht. Wenn die Wagschalen mit Körpern von gleichem Gewichte belastet werden, wenn also an beiden Enden des gleicharmigen Wagebalkens derselbe Zug wirkt, so bleibt der Wagebalken in dieser Lage, während sich bei ungleicher Belastung der Wagschalen die Schale dort senkt, wo der Körper von größerem Gewichte liegt. An dem Wagebalken ist gewöhnlich in der Mitte ein nach unten gehender Zeiger angebracht, dem eine feste Marke oder der Nullpunkt einer kleinen Skala gegenübersteht, wenn der Wagebalken wagerecht steht.

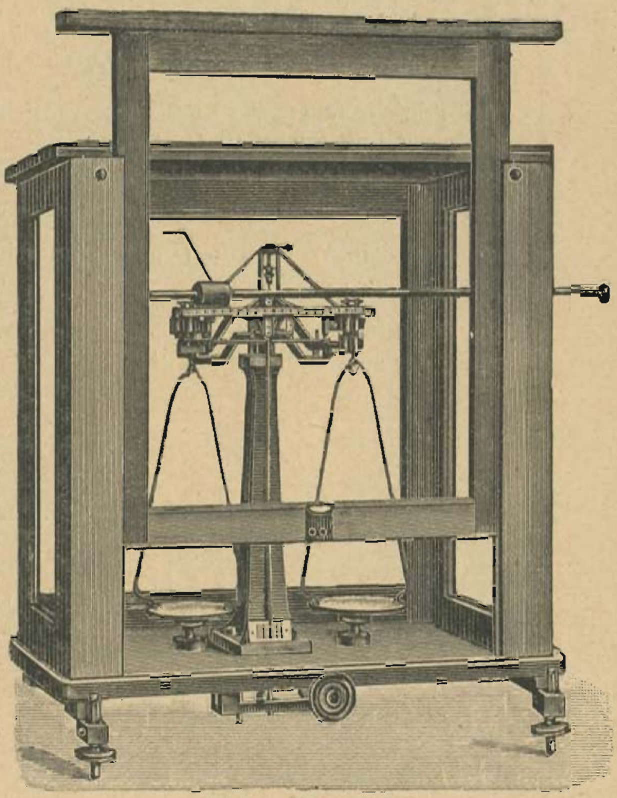

Fig. 284. Gemeine Wage.

Die Belastung der Wage darf nicht so groß sein, daß die durch die Belastung hervorgerufene Formveränderung des Wagebalkens dauernd bestehen bleibt. Vielmehr muß der Wagebalken nach Aufhören der Belastung wieder seine ursprüngliche Form annehmen.

Man hat für physikalische Beobachtungen Wagen gebaut, die bei einer Belastung von einem Kilogramm noch einen meßbaren Ausschlag geben, wenn der eine Körper um ein tausendstel Milligramm schwerer ist als der andere. Derartige Wagen müssen, wenn eine Wägung ausgeführt werden soll, in einem die Wage umgebenden, sie vor Luftzug und Temperaturschwankungen schützenden Glaskasten aufbewahrt werden (wie in Fig. 284). Die Wägung darf nur bei geschlossenem Kasten vorgenommen werden.

Um Bruchteile eines Milligramms zu wägen, ist in der Höhe der Drehungsachse des Wagebalkens eine geradlinige schmale Schiene (Reiterlineal) mit dem Wagebalken fest verbunden, die in hundert Teile der halben Balkenlänge eingeteilt ist, wobei der Nullpunkt der Teilung in der Mitte liegt. Man setzt mit einer von außen zu betätigenden Hebelvorrichtung kleine Zentigrammgewichte (Reitergewichte) von der Form der Fig. 285 auf eine Stelle des Reiterlineals. Befindet sich das Reitergewicht auf dem Teilstrich 100, so wirkt es auf die Wage wie ein Zentigramm*; befindet es sich über dem Teilstrich a, so wirkt es wie $\frac{a}{100}$ cg*.

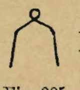
Fig. 285. Reitergewicht.

Bei Präzisionswägungen ist auf den Auftrieb Rücksicht zu nehmen, den jeder Körper in der Luft erfährt (§ 107).

Die **Empfindlichkeit** einer Wage wird durch die Größe des Übergewichtes U bestimmt, das einen noch meßbaren Ausschlag gibt. Sie ist umgekehrt proportional dem Werte von U oder proportional dem reziproken Werte $\frac{1}{U}$ dieses Übergewichtes.

In Fig. 286 möge $B_1 B_2$ den gleicharmigen Wagebalken einer gemeinen Wage darstellen, der um die über der Mitte M des Wagebalkens liegende Achse O drehbar ist. B_1 und B_2 sind die Schneiden für die Wagschalen, von denen jede einschließlich ihrer gleichen Belastungen das Gewicht K haben möge. S ist der Schwerpunkt des Wagebalkens; an ihm greift das Gewicht G des ganzen Wagebalkens an. Wenn auf die rechte Wagschale das Übergewicht U gelegt wird, so nimmt der Wagebalken die Lage $C_1 C_2$ ein; in der Figur ist der Ausschlag α mit Rücksicht auf die Übersichtlichkeit der Verhältnisse übertrieben groß gezeichnet.

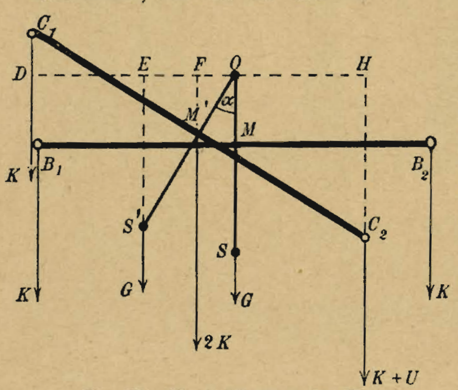

Fig. 286. Empfindlichkeit der Wage.

In der geneigten Lage greifen an dem Wagebalken die Kräfte K im Punkte C_1, $K + U$ im Punkte C_2 und G im Punkte S' an. Wir können die beiden in C_1 und C_2 angreifenden Kräfte durch eine im Mittelpunkte M' des Wagebalkens wirkende Kraft $2K$ ersetzen. Ziehen wir nun durch die Achse O eine wagerechte Gerade und verlängern wir die Kraftrichtungen bis zu ihren Schnittpunkten mit dieser Geraden, so können wir die Momentengleichung aus der Figur ablesen; sie lautet: $U \cdot OH = 2K \cdot OF + G \cdot OE$. Hieraus folgt als Maß der Empfindlichkeit die Gleichung

$$\frac{1}{U} = \frac{OH}{2K \cdot OF + G \cdot OE}.$$

Aus diesem Ausdrucke folgt, daß die Empfindlichkeit im allgemeinen in hohem Maße von der Gesamtbelastung $2K$ abhängt. Der Hebelarm OF der Gesamtbelastung

ist in der Formel für $\frac{1}{U}$ positiv zu rechnen, wenn, wie in Fig. 286, die geometrische Mitte M der Schneiden sich unterhalb der Achse O des Wagebalkens befindet. Das Drehmoment $2K \cdot OF$ ist alsdann bei einer Drehung des Wagebalkens ein rücktreibendes, und die Empfindlichkeit $\frac{1}{U}$ nimmt mit steigender Belastung $2K$ ab. Wenn dagegen die Mittelschneide O des Balkens sich unter der geometrischen Mitte M befindet, so liegt OF nach der anderen Seite, das Drehmoment $2K \cdot OF$ ist ein die Drehung des Wagebalkens förderndes und zählt in der Formel negativ. Es ist aus der Formel ersichtlich, daß die Empfindlichkeit $\frac{1}{U}$ dann mit steigender Belastung zunimmt und sogar unendlich wird, wenn $2K \cdot OF = G \cdot OE$ wird. Die Wage klappt dann beim kleinsten Übergewichte mangels eines rücktreibenden Drehmomentes völlig um. Der Wagebalken ohne Übergewicht befindet sich, wenn die letzte Beziehung gerade erfüllt ist, im indifferenten Gleichgewichte. Es verhält sich in diesem Falle das Balkengewicht zur Gesamtbelastung wie die Entfernung des Mittelpunktes der Endschneiden zu der des Balkenschwerpunktes von der Drehungsachse. Die Drehungsmomente des Balkengewichtes und der Gesamtbelastung heben sich gerade auf. Wird mit steigender Gesamtbelastung deren Drehungsmoment noch größer, so ist der Wagebalken bei wagerechter Stellung im labilen Gleichgewichte und kippt beim Verlassen dieser Lage von selbst um.

Der Arm OF der Gesamtbelastuug wird um so kleiner, je geringer der Abstand der Achse O von der Verbindungsgeraden der Endschneiden C_1 und C_2 des Wagebalkens ist. Wenn die Mitte M des Wagebalkens mit der Achse O zusammenfällt, so wird $OF = 0$. Die Resultierende $2K$ der Gesamtbelastung geht dann bei jeder Stellung des Wagebalkens durch die feste Achse, wird durch deren Gegendruck aufgehoben, und die Empfindlichkeit wird von der Gesamtbelastung $2K$ unabhängig. Deshalb ist man bestrebt, bei der Ausführung der gemeinen Wage so zu verfahren, daß die Mittelschneide des Wagebalkens mit der geometrischen Mitte der beiden Endschneiden zusammenfällt. Für diesen Fall soll der Ausschlag α des Wagebalkens auf Grund der Fig. 287 berechnet werden. Aus dieser Figur ergibt sich unter Benutzung der dort angegebenen Bezeichnungen die Momentengleichung

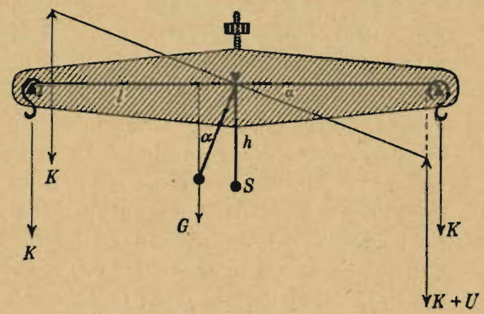

Fig. 287. Empfindlichkeit der Wage.

$$K \cdot l \cos \alpha + G \cdot h \sin \alpha = (K + U) \cdot l \cdot \cos \alpha.$$

Hieraus folgt

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{U}{h} \cdot \frac{l}{G}.$$

Der Ausschlag wächst also mit dem Übergewichte und mit abnehmendem Abstande h des Schwerpunktes von der Mittelschneide. Der Ausschlag bei einem gegebenen Übergewichte kann dadurch recht groß gemacht werden, daß man den Schwerpunkt sehr dicht an die Mittelschneide heranrückt. Um dieses auszuführen, bringt man oben an dem Wagebalken die in der Figur schematisch angedeutete Schraube an.

Ferner folgt aus dem Ausdrucke, daß der Ausschlag mit dem Quotienten aus der Balkenlänge und dem Balkengewichte wächst. Früher hat man versucht, diesen

Quotienten dadurch recht groß zu machen, daß man die Balkenlänge l groß machte. Man hat aber hierbei übersehen, daß man dann auch das Gewicht des Wagebalkens vergrößern mußte, um ihn genügend fest zu machen. Nach § 61 ist der Biegungspfeil bei gleicher Belastung proportional mit der dritten Potenz der Länge. Die Dicke und daher Masse des Wagebalkens muß daher in viel höherem Verhältnis zunehmen als die Balkenlänge, wenn die Durchbiegung des Wagebalkens nicht vergrößert werden soll. Also erreicht man auf diesem Wege keine Vergrößerung der Empfindlichkeit.

Zuerst hat Bunge in Hamburg diesen Fehler erkannt, und er hat daraufhin Wagen mit recht kurzen Wagebalken gebaut, die sich, da sie sehr leicht gebaut werden können, in der Tat als viel empfindlicher erwiesen haben als die früheren Wagen mit langen Wagebalken. Außerdem haben sie den Vorteil, daß Wagen mit kurzen Wagebalken eine nur kleine Schwingungsdauer besitzen.

Bei der Ableitung des obigen Ausdruckes für $\tang \alpha$ ist vorausgesetzt worden, daß sich der Wagebalken wie eine mathematische gerade Linie verhalte. Das tut er in Wirklichkeit aber nicht, da alle Körper unter dem Einflusse der Kräfte verbogen werden. Wenn nun eine Wage so gebaut ist, daß die Mittelschneide mit der Mitte des Wagebalkens genau zusammenfällt, wenn die Wage nicht belastet ist, so rückt diese Mitte sofort höher, sobald die Wage belastet wird, und die Empfindlichkeit wird von der Belastung $2K$ in oben ausgeführter Weise abhängig. Man hat auch schon Wagen gebaut, deren Empfindlichkeit von der Belastung unabhängig wurde, indem man die Aufhängepunkte der Wagschalen höher als die Mittelschneide M legte. Die theoretische Zunahme der Empfindlichkeit kann dann so abgeglichen werden, daß sie sich gerade mit der Abnahme der Empfindlichkeit bei wachsender Belastung wegen der Durchbiegung der Wagebalken aufhebt.

Als praktisches Maß für die Empfindlichkeit muß angegeben werden, wie groß das Übergewicht ist, das bei einer gegebenen Gesamtbelastung einen bestimmten Ausschlag, etwa den eines Skalenteiles, gibt.

Die **Brückenwage**[1]), von der Fig. 288 ein schematisches Bild gibt, besteht aus dem auf der Schneide O liegenden eigentlichen Wagebalken $GOAB$, an dessen einem Ende G die Wagschale zur Aufnahme der Gewichtsstücke hängt. An dem anderen Ende des Wagebalkens hängen drehbar die beiden Stangen AC und BE. E ist das eine Ende eines wagerechten Hebels, dessen anderes Ende auf der festen Schneide F ruht. In C ist das eine Ende der sogenannten Brücke befestigt, deren anderes Ende um eine Schneide D drehbar ist, die auf dem Hebel EF ruht. Wenn die Proportion besteht $OA : OB = FD : FE$, so bewegt sich die Brücke bei einer virtuellen Verschiebung (§ 76) immer parallel zu sich selbst auf und ab. Wenn angenommen wird, daß $OA = \frac{1}{n}\, OB$ und demnach auch $FD = \frac{1}{n}\, FE$ ist, so würde sich, wenn A um 1 mm gesenkt wird, B um n mm senken; also würde sich auch E um n mm und demnach wiederum D um 1 mm senken. Die beiden Enden C und D der Brücke senken sich demnach um denselben Betrag.

Eine beliebige Last L, die auf der Brücke ruht, erzeugt in C und D zwei Auflagedrucke X und Y. Der in C wirkende Druck X überträgt sich in unveränderter Größe nach A. Der in D wirkende Druck Y überträgt sich auf Grund des Momentensatzes an den Punkt E und erzeugt hier den Druck $\frac{1}{n}\, Y$, der sich

1) Erfunden von Quintenez und Schwilgué in Straßburg 1823.

in unveränderter Größe auf B überträgt. Da $OB = n \cdot OA$ ist, so wird der in B wirkende Druck in $n$facher Größe auf den Punkt A übertragen. Hieraus folgt, daß sich der in D wirkende Auflagedruck Y durch das Stangensystem in unveränderte Größe auf A überträgt. Daher wirkt in A die Summe der beiden Auflagedrucke $X + Y = Q$. Die auf der Brücke liegende Last L wirkt also durch Vermittlung des Stangensystemes so, als ob sie unmittelbar in A hinge.

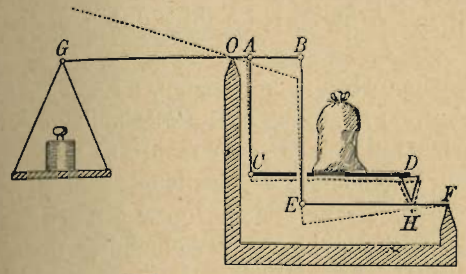

Fig. 288. Brückenwage.

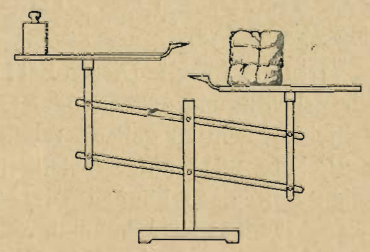

Fig. 289. Tafelwage.

Wenn das Verhältnis der beiden Wagebalken $OG : OA = 10 : 1$ ist, so heißt die Brückenwage **Dezimalwage**, weil das Gewicht der in der Wagschale liegenden Gewichtstücke nur gleich dem zehnten Teile des Gewichtes der auf der Brücke liegenden Last zu sein braucht.

Wenn sich $OG : OA = 100 : 1$ verhält, so entsteht eine **Zentesimalwage**.

Bei der in Fig. 289 schematisch abgebildeten Robervalschen[1]) **Tafelwage**, die in Kaufläden vielfach benutzt wird, wird durch das doppelte Stangensystem bewirkt, daß sich beide Wagschalen nur parallel zu sich selbst auf und ab bewegen können. Die Folge davon ist, daß eine auf die eine Wagschale gelegte Last und die auf die andere Wagschale gelegten Gewichtstücke immer in derselben Weise wirken, unabhängig davon, an welcher Stelle der Wagschalen sie liegen.

§ 76. Das Prinzip der virtuellen Arbeit.

Als Ausdruck der Erfahrung gilt in der Mechanik der **Satz von der Erhaltung der Arbeit** (S. 111):

Bei jeder (reibungslosen) mechanischen Kraftübertragung bleibt die von einer Kraft geleistete Arbeit unverändert.

Dieser Satz gilt ganz allgemein. Durch Bewegungshindernisse, wie z. B. die Reibung, eintretende scheinbare Arbeitsverluste sind immer mit einer entsprechenden Wärmeentwickelung verbunden. Man hat sich gewöhnt, diese auftretenden Wärmemengen als der verlorenen Arbeit gleichwertige Energie anzusehen.

In Fig. 290 sei schematisch ein Mechanismus M angedeutet, dessen Einzelheiten nicht bekannt zu sein brauchen, der aus beliebigen Stangen,

1) Giles Persone, der sich nach seinem Geburtsorte de Roberval nannte, Franzose, lebte 1602—1675, verdienstvoller Physiker seiner Zeit, erfand außer der Tafelwage 1670 noch das Aräometer (s. d.).